“同伦分析方法”辅助算子 L 之选择

廖世俊

2006-12-20

以中文版《超越摄动-同伦分析方法导论》第二章例题为例：

$$V'(t)+V^2(t)=1, \qquad V(0)=0 \qquad (1)$$

（A）首先， 我们有很大的自由，选取辅助算子 L。不妨设辅助算子 L 之一般表达式为：

$$Lu=u'(t)+\gamma(t)\,u(t)\,, \qquad (2)$$

其中，$\gamma(t)$为待定实函数。该算子满足：

$$L[0]=0 \qquad (3)$$

（B）选择 L 之关键， 在于解表达。

假设$V(t)$可表达为基函数 $f_k(t)$ （base function）的线性叠加

$$V(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, f_k(t)\,, \qquad (4)$$

其中 a_k 为实系数， $f_1(t)$ 为首个基函数。

高阶变形方程

$$L[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)]=\hbar H(t)\,R_m(t), \quad V_m(t)=0 \qquad (5)$$

之解为：

$$V_m(t)=\chi_m V_{m-1}(t)+F(t)+C_1\,G(t)\,, \qquad (6)$$

其中，$F(t)$为特解，$G(t)$为通解，即：

$$L[F(t)-\chi_m V_{m-1}(t)]=\hbar H(t)\,R_m(t), \qquad L[G(t)]=0 \qquad (7)$$

由“解表达原则”（4），$V(t)$为基函数 $f_k(t)$ （base function）的线性叠加，从而

$V_m(t)$也必为基函数 $f_k(t)$（base function）的线性叠加。由（6）和（4），特解$F(t)$

应为基函数 $f_k(t)$ 的线性叠加，且通解 $G(t)\in\{f_1(t), f_2(t),\cdots\}$。由于方程是一阶的，故

$$G(t)=f_1(t) \tag{8}$$

上式代入（7），有

$$L[f_1(t)]=f_1^{'}(t)+\gamma(t)f_1(t)=0 \tag{9}$$

（1）设 $V(t)$ 为如下基函数（base function）的线性叠加

$$\{1,t,t^3,t^5,\cdots\} \tag{10}$$

即

$$f_1(t)=1,\qquad f_2(t)=t,\qquad f_3(t)=t^3,\cdots \tag{11}$$

将 $f_1(t)=1$ 带入（9），有 $\gamma(t)=0$，即

$$L[u]=u' \tag{12}$$

（2）设 $V_m(t)$ 为如下基函数（base function）的线性叠加

$$\{e^{-t},e^{-2t},\cdots\}, \tag{13}$$

即

$$f_1(t)=e^{-t}, f_2(t)=e^{-2t},\cdots \tag{14}$$

将 $f_1(t)=e^{-t}$ 代入（9），有

$$[\gamma(t)-1]e^{-t}=0, \tag{15}$$

从而 $\gamma(t)=1$，即

$$Lu=u'+u。 \tag{16}$$

（C）$H(t)$ 的选择，需满足“解表达原则”,“系数遍历原则”和“解存在原则”。